



TITLE:

# On uncountable representability of $cBa$ under $\neg CH$ (Metamathematics and its applications)

AUTHOR(S):

高橋, 真

---

CITATION:

高橋, 真. On uncountable representability of  $cBa$  under  $\neg CH$  (Metamathematics and its applications). 数理解析研究所講究録 1995, 930: 1-9

ISSUE DATE:

1995-11

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/59955>

RIGHT:

On uncountable representability of cBa under  $\neg\text{CH}$ 

神戸大発達 高橋 真 (Makoto Takahashi)

ブール代数を集合を用いて表現するということは、Stone の表現定理としてよく知られている。Stone の表現定理によれば、任意のブール代数はある集合代数の作るブール代数に同型になる。しかし Stone の表現定理を拡張して、任意の  $\kappa$ -完備なブール代数はある  $\kappa$ -集合代数（定義を見よ）のなすブール代数に同型であるとすることは一般にはできない。なぜなら  $\kappa$ -集合代数のなすブール代数は常に  $(\kappa, 2)$ -DL をみたすが、 $(\kappa, 2)$ -DL をみたさない完備ブール代数が存在するからである。Loomis-Sierpinski は Stone の表現定理をこの方向ではなく、表現の方法を変えることで  $\sigma$ -完備なブール代数に対して拡張した。すなわち、任意の  $\sigma$ -完備なブール代数はある  $\sigma$ -集合代数のなすブール代数をその上の  $\sigma$ -完備なイデアルで割ってできるブール代数に同型になることを示した。それでは、任意の  $\kappa$ -完備なブール代数に対して、Loomis-Sierpinski の定理と同様のことが成り立つであろうか。答えは再び否である。 $\kappa$ -集合代数のなすブール代数をその上の  $\kappa$ -完備なイデアルで割ってできるブール代数に同型になることを  $\kappa$ -表現可能と呼ぶことにする。このとき、 $2^\omega$ -表現可能なブール代数は  $(\omega, 2)$ -DL をみたすが、上と同様に  $(\omega, 2)$ -DL をみたさない完備ブール代数が存在するから、Loomis-Sierpinski の定理をそのまま  $\kappa$ -完備なブール代数に対して拡張することはできない。それでは一体どのようなブール代数が  $\kappa$ -表現可能になるのであろうか。本稿で

は特に $\omega_1$ -表現可能の場合について、表現可能性と類似の性質との関連を考察することにする。

本稿で用いるブール代数の記号その他は [8] と同じである。不明のことがあればそれを参照して欲しい。またブール代数の性質で $\kappa$ -何々というときは、特に断らない限り $\leq \kappa$ -何々の意味であるとする。

$\kappa$  を非可算の正則基数とする。べき集合代数の部分ブール代数を集合代数と呼ぶことにする。集合代数  $\mathcal{A}$  が  $\kappa$ -集合代数であるとは、 $\mathcal{A}$  の濃度が  $\kappa$  以下の部分集合  $X$  に対し、 $\cup X, \cap X \in \mathcal{A}$  をみたすときをいう。 $\kappa$ -完備ブール代数  $B$  はある  $\kappa$ -集合代数  $\mathcal{A}$  とそのうえの  $\kappa$ -完備なイデアル  $I$  が存在して商ブール代数  $B/I$  に同型になるとき、 $\kappa$ -表現可能であるという。 $\kappa$ -表現可能な  $\kappa$ -完備ブール代数についてはいろいろなことが知られている。もし、 $\kappa$ -表現可能な  $\kappa$ -完備ブール代数の完備化したものが再び  $\kappa$ -表現可能になるならば、わざわざ完備ブール代数に制限して考察する意味はないが、完備化により表現可能性のこわれる例がある。

**例 1**  $B = \mathcal{P}(\omega_2)/[\omega_2]^{<\omega_2}$  とする。 $B$  は明らかに  $\omega_1$ -表現可能である。一方、 $2^{\omega_2} = \omega_3$  ならば  $B$  の完備化  $\bar{B}$  は  $Col(\omega, \omega_3)$  に同型になることが知られている [1]。下で述べるように  $\omega_1$ -表現可能な完備ブール代数は  $\omega_1$  を保存するから、 $\bar{B}$  は  $\omega_1$ -表現可能ではない。

$\kappa$ -表現可能性に関して次の結果が知られている。

**定理 2 (Karp)**  $\kappa$ -表現可能であるが  $\kappa^+$ -表現可能ではない完備ブール代数が存在する。

証明は  $Col(\kappa, \kappa^+)$  をとればよい。従って、次の系が成立する。

系 3 連続体仮説が成立することと任意の $\omega_1$ -表現可能な完備ブール代数が $2^\omega$ -表現可能になることは同値である。

この系より、連続体仮説の否定のもとでは $\omega_1$ -表現可能性と $2^\omega$ -表現可能性に違いがあるが、本稿の主な目的のひとつはその違いを考察することである。 $\kappa$ -表現可能性の同値条件として次のものが知られている。

定理 4 (Sikorski-Chang)  $\kappa$ -完備ブール代数  $B$  が $\kappa$ -表現可能になるための必要十分条件は

$$\forall a \in B^+ \forall \{a_{\alpha\beta} \mid \alpha, \beta < \kappa\} [\forall \alpha < \kappa \{a_{\alpha\beta} \mid \beta < \kappa\} \in \text{Part}(B[a])$$

$$\Rightarrow \exists f : \kappa \rightarrow \kappa [\{a_{\alpha f(\alpha)} \mid \alpha < \kappa\} \text{ は } \text{fip} \text{ をもつ}] \quad \text{である。}$$

従って、predense set を用いて表すと次の系を得る。

系 5  $\kappa$ -完備ブール代数  $B$  が $\kappa$ -表現可能になるための必要十分条件は

$$\forall a \in B^+ \forall \{P_\alpha \mid \alpha < \kappa\} [\forall \alpha < \kappa |P_\alpha| \leq \kappa \text{ かつ } P_\alpha \text{ は predense below } a$$

$$\Rightarrow \exists G \ni a [G \text{ はフィルターかつ } G \cap P_\alpha \neq \emptyset] \quad \text{である。}$$

この系より Martin's Axiom (MA) は

$$MA \equiv \forall \lambda < 2^\omega \forall B : \text{ccc}[B] \text{ は } \lambda\text{-表現可能}$$

と表されることがわかる。さらに、次の命題が成り立つ。

命題 6  $B$  を $\kappa$ -表現可能な完備ブール代数とする。このとき、 $B$  は $\kappa$ 以下の基数を保存する。

さらに、 $\kappa$  の stationary な部分集合も保存する。

証明は [5] の証明と同様にできる。

$\kappa, \lambda, \mu$  を非可算正則基数とする。完備ブール代数  $B$  が  $P(\kappa, \lambda, \mu)$  をみたすとは、

$$\forall a \in B^+ \forall \{a_{\alpha\beta} \mid \alpha < \kappa, \beta < \lambda\} [\forall \alpha < \kappa \{a_{\alpha\beta} \mid \beta < \lambda\} \in \text{Part}(B[a])$$

$$\implies \exists f: \kappa \rightarrow \lambda \forall X \subset \kappa [|X| < \mu \implies \wedge \{a_{\alpha f(\alpha)} \alpha \in X\} > 0]]$$

となるときをいう。条件からすぐわかるように、 $P(\kappa, \kappa, \omega)$  は  $\kappa$ -表現可能性である。また、 $P(\omega_1, \omega_1, \omega_1)$  は Smith の条件と呼ばれているものであり、 $P(\omega, \lambda, \omega_1)$  は  $(\omega, \lambda)$ -分配法則  $((\omega, \lambda)\text{-DL})$  である。さらに、 $P(\omega_1, \infty, \omega_1)$  は Levinski が [7] で定義した strongly  $\omega_1$ -distributivity に同値となる。 $2^\omega$ -表現可能性に関しては、次の Chang の結果がある。

**定理 7 (Chang)**  $P(2^\omega, 2^\omega, \omega) \implies P(2^\omega, 2^\omega, \omega_1)$

また、 $P(\omega_1, \omega_1, \omega_1)$  と  $P(\omega_1, \infty, \omega_1)$  に関しては次の結果がある。

**定理 8 (Takahashi)** 1.  $P(\omega_1, \omega_1, \omega_1) \iff (\omega, 2) - DL$  かつ  $P(\omega_1, 2^\omega, \omega)$

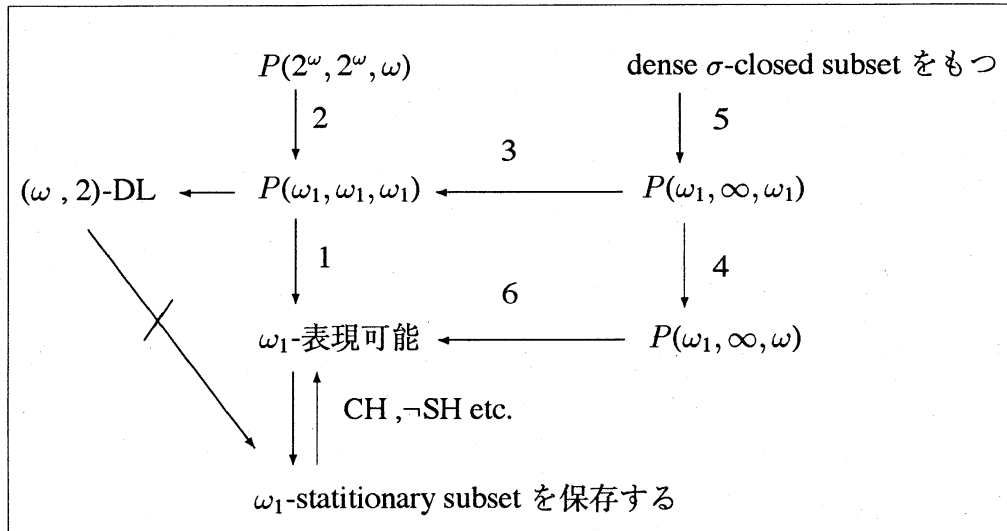
2.  $P(\omega_1, \infty, \omega_1) \iff (\omega, \infty) - DL$  かつ  $P(\omega_1, \infty, \omega)$

Goldstern-Shelah は [3] で  $B$  が表現可能であることを  $\text{BFA}(B, \kappa)$  で表している。これは  $B$  が  $\kappa$ -表現可能というときは、どちらかという to real world で  $B$  が  $\kappa$ -表現可能であると考ええるのに対し、 $\text{BFA}(B, \kappa)$  は記号を見てもわかるように  $\kappa$ -表現可能かどうかは ZFC で決定できないようなものに対する forcing axiom ととらえているという違いがある。

上で定義した性質の関係を図に表すと次ページのようにになる。以下図で番号をふった矢印の逆向きは（何らかの仮定の下で）反例のあることを示す。

[1 の反例]

**命題 9 (MA+¬CH)**  $\omega_1$ -表現可能であるが  $P(\omega_1, \omega_1, \omega_1)$  をみたさない完備ブール代数が存在する。



MA+¬CH を仮定すると、前に述べたように

$$MA \equiv \forall \lambda < 2^\omega \forall B : ccc[B \text{ は } \lambda\text{-表現可能}]$$

であるから、ccc をみたす完備ブール代数  $B$  は  $\omega_1$ -表現可能である。しかし、MA+¬CH のもとでは ccc をみたす完備ブール代数は  $(\omega, 2)$ -DL をみたさない。よって  $B$  は  $P(\omega_1, \omega_1, \omega_1)$  をみたさない。しかし、これはあまりに trivial である。しかし、MA を仮定しないと話はかなり難しくなる。もし、 $\omega_2$  上の  $< \omega_2$ -完備なイデアル  $I$  で商ブール代数  $\mathcal{P}(\omega_2)/I$  が完備になるものが存在するならば、 $\mathcal{P}(\omega_2)/I$  が  $(\omega, 2)$ -DL をみたすことと  $I$  が  $2^\omega$ -完備であること（従って  $\mathcal{P}(\omega_2)/I$  が  $2^\omega$ -表現可能であること）は同値であるので、上の命題はそのようなイデアルの存在と ¬CH のもとでも正しい。 $\omega_1$ -表現可能性と  $P(\omega_1, \omega_1, \omega_1)$  の関係に関しては Smith が次のことを示している。

**定理 10 (Smith)**  $\omega_1$ -表現可能な  $\omega_1$ -完備ブール代数はすべて  $P(\omega_1, \omega_1, \omega_1)$  をみたすことと CH は同値である。

この Smith の定理を完備ブール代数に制限できるか、すなわち ¬CH のもとで  $\omega_1$ -表現可

であるが  $P(\omega_1, \omega_1, \omega_1)$  をみたさない完備ブール代数が存在するかは open problem である。

[2 の反例] 次のような長さが  $\omega_1$  の cut&choose ゲーム  $G(B, a)$  を考える。ここで  $B$  は完備ブール代数で  $a \in B^+$  である。プレーヤ I は最初に  $a$  の 2-partition  $P_0$  を選び、各  $2\alpha + 2$  stage で stage  $2\alpha + 1$  でプレーヤ II の選んだ元の 2-partition  $P_{\alpha+1}$  を選ぶ。プレーヤ II は stage  $2\alpha + 1$  において、stage  $2\alpha$  で I が選んだ 2-partition  $P_\alpha$  から元  $a_\alpha$  を選ぶ。limit stage  $\alpha$  では、I が  $\bigwedge \{a_\beta \mid \beta < \alpha\}$  の 2-partition を選ぶ。ここで  $a$  の 2-partition とは  $a_1 \wedge a_2 = 0$  かつ  $a_1 \vee a_2 = a$  をみたす元  $a_1$  と  $a_2$  の集合  $\{a_1, a_2\}$  を意味する。従って、 $a$  から始まって cut & choose の繰り返りでゲームが進む。ゲームの勝敗は次のように決める。プレーヤ I は  $\exists \alpha < \omega_1 [\bigwedge \{a_\beta \mid \beta < \alpha\} = 0]$  となるときの勝つとする。

ゲーム  $G(B, a)$  を用いて  $P(\omega_1, \omega_1, \omega_1)$  の特徴付けができる。

定理 11 完備ブール代数  $B$  に対し次の条件はすべて同値である。

1.  $B$  は  $P(\omega_1, \omega_1, \omega_1)$  をみたす
2.  $B$  は  $P(\omega_1, 3, \omega_1)$  をみたす
3. 濃度が  $2^\omega$  以下の ccc をみたす完備ブール代数  $C$  に対し、 $\|C$  は完備である  $\|B = 1$  である
4.  $\forall a \in B^+ \forall f \in V^{(B)} [\|f : \omega_1 \rightarrow \omega_1\| = a \implies \exists f : \omega_1 \rightarrow \omega_1 \forall \alpha < \omega_1 \|f \restriction \check{\alpha} = \check{f} \restriction \check{\alpha}\| \cdot a > 0]$
5.  $\forall a \in B^+ [I \text{ は } G(B, a) \text{ で winning strategy をもたない}]$

(1) と (2) (3) の同値性の証明は [8] にある。(1) と (4) の同値性の証明は容易である。(1) と (5) の同値性を示す。

(5) $\Rightarrow$ (1):  $B$ は  $P(\omega_1, \omega_1, \omega_1)$  をみたさないとする。(1) と (2) の同値性より、 $B$  は  $P(\omega_1, 3, \omega_1)$  をみたさない。よって、ある  $a \in B^+$  と 2-partition の集合  $\{P_\alpha\}_{\alpha < \omega_1}$  が存在して、  
 $\forall f \in \prod_{\alpha < \omega_1} P_\alpha \exists \alpha < \omega_1 [\wedge \{f(\alpha) | \beta < \alpha\} = 0]$  となる。 $I$  が  $G(B, a)$  において  $P_\alpha$  に従ってプレーを行うと、必ず勝つから  $I$  は winning strategy を持つことになる。よって  $B$  は  $P(\omega_1, \omega_1, \omega_1)$  をみたす。

(1) $\Rightarrow$ (5): ある  $a \in B^+$  が存在して、 $G(B, a)$  で  $I$  が winning strategy  $\sigma$  を持つとする。partition の集合  $\{P_\alpha\}_{\alpha < \omega_1}$  を次のように帰納的に定義する。

$$P_1 = \sigma(<>), P_2 = \cup \{ \sigma(< x_1 >) | x_1 \in \sigma(<>) \} \dots$$

$$P_\alpha = \cup \{ \sigma(< x_\beta >_{\beta < \alpha}) | < x_\beta >_{\beta < \alpha} \text{ は } \sigma \text{ に従うプレーの列} \} \dots$$

$B$  は  $(\omega, 2)$ -DL をみたすから、各  $P_\alpha$  は  $a$  の partition であり、また  $|P_\alpha| \leq 2^\omega$  となる。

$P(\omega_1, \omega_1, \omega_1)$  ならば  $P(\omega_1, 2^\omega, \omega_1)$  であるので、ある  $f \in \prod_{\alpha < \omega_1} P_\alpha$  が存在して、任意の  $\alpha$  に対し、 $\wedge \{f(\alpha) | \beta < \alpha\} > 0$  となる。各  $\alpha$  に対し、 $f(\alpha) \in \sigma(< f(\beta) >_{\beta < \alpha})$  であるから、これは  $\sigma$  に従う  $G(B, a)$  のプレーである。しかし、このプレーで  $I$  は負けである。これは  $\sigma$  が  $I$  の winning strategy であることに反する。

系 12  $B$  が  $P(\omega_1, \omega_1, \omega_1)$  をみたし、 $\| \dot{C} \|^{(B)} = 1$  とする。このとき、 $B$  と  $\dot{C}$  の forcing product  $B \otimes \dot{C}$  も  $P(\omega_1, \omega_1, \omega_1)$  をみたす。

命題 13 ( $\neg$ CH)  $B = \text{Col}(\omega_1, 2^\omega)$ ,  $\| \dot{C} \|^{(B)} = 1$  とする。このとき  $B \otimes \dot{C}$  は  $P(\omega_1, \omega_1, \omega_1)$  をみたすが、 $P(2^\omega, 2^\omega, \omega)$  はみたさない。すなわち、 $2^\omega$ -表現可能ではない。

[3 の反例]  $\kappa$  を可測基数,  $D$  を  $\kappa$  上の normal 測度とし、 $D$  より作られる Prikry forcing を  $P$  とする。このとき



**命題 14**  $r.o.(P)$  は  $2^\omega$ -表現可能であるが、 $P(\omega_1, \infty, \omega_1)$  はみたさない。

従って、特に  $P(\omega_1, \omega_1, \omega_1) \neq P(\omega_1, \infty, \omega_1)$  であるが、前述の系よりも少し強いことが言える。すなわち、可測基数の存在と  $\neg CH$  のもとで、 $P(\omega_1, \omega_1, \omega_1)$  をみたすが、 $2^\omega$ -表現可能でもなく  $P(\omega_1, \infty, \omega_1)$  もみたさない完備ブール代数が存在する。

また MM を仮定すると Namba forcing  $N_m$  は  $\omega_1$  の stationary subset を保存するから  $r.o.(N_m)$  は  $P(\omega_1, \infty, \omega)$  をみたす。また  $r.o.(N_m)$  は  $(\omega, 2)$ -DL をみたす。よって、定理 8 より  $N_m$  は  $P(\omega_1, \omega_1, \omega_1)$  をみたす。一方、 $N_m$  は  $(\omega, \infty)$ -DL をみたさないから、 $P(\omega_1, \infty, \omega_1)$  もみたさない。よって MM を仮定しても反例を作ることができる。

[4 の反例] この反例は  $MA + \neg CH$  のもとで作る。MA を仮定しない場合の反例は open problem である。

[5 の反例] この反例は次の Devlin の結果を用いることでできる。

**定理 15 (MA +  $\neg CH$ )**  $(\omega, \infty)$ -DL と  $\omega_2$ -cc をみたす完備ブール代数は  $P(\omega_1, \infty, \omega)$  もみたす。

よって

**系 16 (MA +  $\neg CH$ )**  $(\omega, \infty)$ -DL と  $\omega_2$ -cc をみたす完備ブール代数は  $P(\omega_1, \infty, \omega_1)$  をみたす。

一方、 $B$  が dense  $\sigma$ -closed subset をもつ完備ブール代数ならば、 $B$  は  $2^\omega$ -cc をみたさない。

よって、 $MA + \neg CH$  のもとで、 $(\omega, \infty)$ -DL と  $\omega_2$ -cc をみたす完備ブール代数が反例を与える。ここでも MA 仮定しない場合の反例は open problem である。

[6 の反例] BPFA (Bounded Proper Forcing Axiom) は任意の proper な完備ブール代数は  $\omega_1$ -表現可能であるという公理である。Goldstern-Shelah は [3] で BPFA の consistency strength は  $\Sigma_1$ -reflecting cardinal の存在と同等であることをしめした。PFA の consistency strength は

それよりも大きいから、間接的ではあるけれども 6 の逆向きと言えないことの証になっている。

## 参考文献

- [1] B. Bacar and F. Franěk, Completion of factor algebras of ideals, Proc. of AMS 100 (1987), 205—212.
- [2] K. Devlin, An alternative to Martin's axiom, in: Set Theory and Hierarchy Theory , Bierutowice ,Poland , Lecture Notes in Mathematics 537, Springer-Verlag, Heidelberg,65—76.
- [3] M. Goldstern and S. Shelah, The Bounded Proper Forcing Axiom, J. of Symbolic Logic 60 (1995), 58—73.
- [4] T. Jech, Set Theory, Academic Press, 1978
- [5] T. Jech, More game-theoretic properties of Boolean algebras, Annals of Pure and Appl. Logic 26 (1984), 11—29.
- [6] A. Kanamori and S. Shelah, Complete quotient Boolean Algebras, preprint
- [7] J. P. Levinski, Filters and large cardinals, Annals of Pure and Appl. Logic 72 (1995), 177—212.
- [8] M. Takahashi, Completeness of Boolean powers of Boolean algebras, J. of Math. Soc. Japan 40(1988), 445—456.